תרגילי בית 3. התמרות פורייה

עם תיקון בשאלה 1 (2/1/03)

---

1. **(א)** מצאו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & , \quad |x|\le 1\\ 0 & , \quad |x|>1\end{cases}$.

(ב) חשבו את האינטרגל $\int_0^\infty \frac{t\cos t-\sin t}{t^3}\cdot\cos\frac{t}{3}dt$.

(ג) חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{(t\cos t-\sin t)^2}{t^6}dt$.

---

2. הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נתונה ע"י $f(x)=\begin{cases}e^{-x}\sin x & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$. הפונקציה $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $u(x)=f(-x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

(א) הוכיחו כי $\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+(1+i\omega)^2}$.

(ב) הוכיחו כי $\widehat{u}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+(1-i\omega)^2}$.

(ג) בדרך כלל אם $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה קומפלקסית ב $G(\mathbb{R})$ ו U מוגדרת ע"י $U(x)=F(-x)$ יש נוסחה פשוטה אשר מקשרת בין $\widehat{F}$ ו $\widehat{U}$. מצאו והוכיחו את הנוסחה הזו.
נניח בנוסף שהקונבולוציה $F*U$ ב $G(\mathbb{R})$. האם היא בהכרח פונקציה זוגית?
מצאו תנאי מתאים נוסף על F אשר מבטיח שהתמרת פורייה של $F*U$ היא פונקציה ממשית.

---

3. נגדיר את הפונקציות f, g ו h ע"י $f=\chi_{[-1,1]}$, $g(x)=e^{ix}f(x)$ ו $h(x)=xf(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
חשבו את התמרות פורייה של f, g ו h. חשבור גם את $\int_{-\infty}^\infty \frac{(x\cos x-\sin x)^2}{x^4}dx$.

---

4. **(א)** חשבו את התרמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=e^{-c|x|}\cos bx$ כאשר b ו c הם קבועים חיוביים.

(ב) חשבו את האינטרגל $\int_0^\infty \frac{\cos 2\pi u}{1+u^2}du$.

(ג) חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{du}{(4+9u^2)^2}$.

---

5. **(א)** מצאו פונקציה $g\in G(\mathbb{R})$ אשר מקיימת $\int_{-\infty}^\infty g(x-t)g(t)dt=e^{-x^2}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

(ב) האם, בנוסף לפונקציה שמצאתם בסעיף (א), יש עוד פונקציה או פונקציות ב $G(\mathbb{R})$ אשר מקיימ(ו)ת את אותה משוואה? נמקו.

---

6. הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ מוגדרת ע"י

$$g(x)=\begin{cases}e^{-x} & , \quad x>0\\ C & , \quad x=0\\ -e^{x} & , \quad x<0\end{cases}$$

כאשר הקבוע C שווה למספר טלפון שלך, ללא קידומת.
(א) חשבו את $\widehat{g}$, התמרת פורייה של g.
(ב) בתנאים מתאימים על הפונקציה f, מתקיימת הנוסחא

$$f_{\pm}(x) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{i\omega x}\widehat{f}(\omega)d\omega. \tag{1}$$

כאשר $f_{\pm}$ פונקציה אשר "כמעט שווה" ל f. רשמו הגדרה מדויקת של $f_{\pm}$. בדקו שאם בוחרים $f = g$ כאשר g הפונקציה הספציפית המוגדרת לעיל, אז מתקיימים כל התנאים הדרושים לקיום (1). חשבו את הגבול באגף הימין של (1) כאשר $f = g$ ו $x = 0$. בדקו שהנוסחא (1) אכן מתקיימת עבור $f = g$ ו $x = 0$.
(ג) האם אפשר להחליף את הנוסחא (1) ע"י

$$f_{\pm}(x) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R^2} e^{i\omega x}\widehat{f}(\omega)d\omega \tag{2}$$

או

$$f_{\pm}(x) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R^2}^{R} e^{i\omega x}\widehat{f}(\omega)d\omega \tag{3}$$

כאשר f מקיימת את אותם התנאים אשר דרושים לקיום הנוסחא (1) ?
אם התשובה היא "כן", רשמו הוכחה לכך. (אפשר להסתמך על המשפט שמבטיח קיום של (1).)
אם התשובה היא "לא", מצאו דוגמא נגדית לכל אחד מהנוסחאות (2) ו (3).